II/ 1. On a $\boxed{X_1(\Omega) = \{0;1\}}$ et $P(X_1=0) = \frac{1}{3}$ (tirer une noire dans U) et donc $P(X_1=1) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Autrement dit $\boxed{X_1 \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } 2/3}$.

2.a) Si $X_1 = 0$, cela signifie que l'on a tiré une boule noire au premier tirage donc le second tirage a lieu dans l'urne U.

Ainsi $\boxed{P_{[X_1=0]}(X_2=0) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P_{[X_1=0]}(X_2=1) = \frac{2}{3}}$.

De même si $X_1 = 1$, on a tiré une première boule blanche donc le second tirage a lieu dans V d'où $\boxed{P_{[X_1=1]}(X_2=1) = \frac{3}{4} \text{ et } P_{[X_1=1]}(X_2=2) = \frac{1}{4}}$.

b) On a $\boxed{X_2(\Omega) = \{0;1;2\}}$ et

$$P(X_2=0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{proba composées}}}{=} P_{[X_1=0]}(X_2=0) \times P(X_1=0) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

$$P(X_2=1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{proba totales avec s.c.e } ((X_1=0),(X_1=1))}}{=} P(X_1=0) P_{[X_1=0]}(X_2=1) + P(X_1=1) P_{[X_1=1]}(X_2=1) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{13}{18}$$

$$P(X_2=2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{proba composées}}}{=} P(X_1=1) . P_{[X_1=1]}(X_2=2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}.$$

On peut résumer cela ainsi :

k	0	1	2
$P(X_2=k)$	$1/9$	$13/18$	$1/6$

Rq : $\frac{1}{9} + \frac{13}{18} + \frac{1}{6} = 1$.

c) On a $E(X_2) = \sum_{k \in X_2(\Omega)} k P(X_2=k) = 0 \times \frac{1}{9} + 1 \times \frac{13}{18} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{13}{18} + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{19}{18}}$

3_ Comme on a effectué n tirages, $\boxed{X_n(\Omega) = [\![0;n]\!]}$

L'événement $X_n = 0$ a lieu si on n'a tiré que des boules noires, on n'a donc jamais changé d'urnes, tous les tirages ont eu lieu dans l'urne U. Ainsi, $\boxed{P(X_n=0) = \left(\frac{1}{3}\right)^n}$ (formule des probabilités composées)

4- À chaque boule blanche tirée, il y a changement d'urne. Comme il n'y a que deux urnes, chaque paire de boules blanches permet de revenir à l'urne initiale qui est U. Ainsi, après avoir obtenu un nombre pair de boules blanches lors des n premiers tirages, <u>le $n+1$-ème a lieu dans U.</u>

D'après la formule des probabilités totales pour le s.c.e. $(X_n=k)_{0\leq k\leq n}$, on a
$P(X_{n+1}=1) = \sum_{k=0}^{n} P(X_n=k)P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=1)$.

Or, $\forall k\geq 2$, $P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=1)=0$

- $P_{[X_n=0]}(X_{n+1}=1) = \frac{2}{3}$ (tirage d'une blanche dans U car 0 est pair).
- $P_{[X_n=1]}(X_{n+1}=1) = \frac{3}{4}$ (tirage d'une noire dans V car 1 est impair).

D'où $\boxed{P(X_{n+1}=1) = \frac{3}{4}P(X_{n+1}=1) + \frac{2}{3}P(X_n=0)}$

6- D'après Q3, $P(X_n=0)=\left(\frac{1}{3}\right)^n$.
Ainsi en multipliant la relation précédente par $\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}$, on obtient :

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}P(X_{n+1}=1) = \frac{3}{4}\times\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}P(X_n=1) + \frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n\times\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{3}{4}\times\frac{4}{3}\times\left(\frac{4}{3}\right)^n P(X_n=1) + \frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n\times\left(\frac{4}{3}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow \boxed{u_{n+1} = u_n + \frac{8}{9}\times\left(\frac{4}{9}\right)^n}.$$

7- a) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{P}(n)$: $u_n = \frac{8}{5}\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$.

- D'une part $u_1 = \frac{4}{3}P(X_1=1) \overset{Q1}{=} \frac{4}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{8}{9}$ et d'autre part $\frac{8}{5}\left(1-\frac{4}{9}\right) = \frac{8}{5}\times\frac{5}{9} = \frac{8}{9}$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n\in\mathbb{N}^*$.
D'après Q6, on a $u_{n+1} = u_n + \frac{8}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^n \overset{\mathcal{P}(n)}{=} \frac{8}{5}\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right) + \frac{8}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^n$

$$= \frac{8}{5}\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n + \frac{5}{8}\times\frac{8}{9}\times\left(\frac{4}{9}\right)^n\right] = \frac{8}{5}\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n + \frac{5}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$$

$$= \frac{8}{5}\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\left(1-\frac{5}{9}\right)\right] = \frac{8}{5}\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\times\frac{4}{9}\right] = \frac{8}{5}\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}\right]$$ ie $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- D'après le principe de récurrence, on a montré que
$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{8}{5}\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]}$.

b) D'après 6 et 7a, on obtient $P(X_n=1) = \left(\frac{3}{4}\right)^n u_n = \boxed{\frac{8}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]} = \frac{8}{5}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$

c) Comme $\left|\frac{3}{4}\right|<1$ et $\left|\frac{4}{9}\right|<1$, on a $\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(X_n=1) = 0}$

Rq : Cela est conforme avec l'intuition : plus on effectue de tirages, plus la probabilité d'obtenir une seule blanche est faible.